**微专题1高考中的函数与导数问题**

id:2147491188;FounderCES

一、选择题(每小题5分,共20分)

1*.*已知函数*f*(*x*)(*x*∈R)满足*f*(*x*)*=f*(2*-x*),*g*(*x*)*=-x*2*-x.*若*f*(*x*)*=g*(*x*)*h*(*x*),*h*(*x*)为一元二次函数,*f*(*x*)的最高次项的系数为*-*1,则*f*(*x*)的极小值点为()

A*.x=*1 B*.x=*1*+* C*.x=*1*-* D*.x=*1*+*或1*-*

2*.*已知函数*f*(*x*)*=x+*e*-x*,若存在*x*∈R,使得*f*(*x*)≤*ax*成立,则实数*a*的取值范围是()

A*.*(*-∞*,1*-*e] B*.*(1,*+∞*) C.(1-e,1] D*.*(*-∞*,1*-*e]∪(1,*+∞*)

3*.*已知函数*f*(*x*)的定义域为R,其图象关于直线*x=*1对称,其导函数为*f* *'*(*x*),当*x<*1时,2*f*(*x*)*+*(*x-*

1)*f* *'*(*x*)*<*0,那么不等式(*x+*1)2*f*(*x+*2)*>f*(2)的解集为()

A.(-∞,0) B.(-∞,-2) C.(-2,0) D.(-∞,-2)∪(0,+∞)

4*.*若函数*f*(*x*)*=m-x*2*+*2ln *x*在[,e]上有两个不同的零点,则实数*m*的取值范围为()

A.(1,e2*-*2] B.[4*+*,e2*-*2] C.(1,4*+*] D.[1,*+∞*)

二、填空题(每小题5分,共10分)

5*.*已知函数*f*(*x*)*=*e*x+*2*x*2*-*4*x*(e为自然对数的底数),则函数*f*(*x*)的图象在*x=*1处的切线方程是*.*

6*.*已知函数*f*(*x*)*=*ln(*x+*1)*-*2的图象的一条切线为*y=ax+b*,则的最小值是*.*

三、解答题(共48分)

7*.*(12分)已知*f*(*x*)*=x*2*-*2*ax+*ln *x.*

(1)当*a=*1时,求*f*(*x*)的单调性;

(2)若*f* *'*(*x*)为*f*(*x*)的导函数, *f*(*x*)有两个不相等的极值点*x*1,*x*2(*x*1*<x*2),求2*f*(*x*1)*-f*(*x*2)的最小值*.*

8*.*(12分)已知函数*f*(*x*)*=*(*x>*0,*a*∈R)*.*

(1)讨论函数*f*(*x*)的零点的个数;

(2)若函数*g*(*x*)*=*e*x-*ln *x+*2*x*2*+*1,且对于任意的*x*∈(0,*+∞*),总有*xf*(*x*)≤*g*(*x*)成立,求实数*a*的最大值*.*

9*.*(12分)已知函数*f*(*x*)*=a*ln *x-x+*2,*a*∈R*.*

(1)若函数*f*(*x*)有极值点,求*a*的取值范围;

(2)若对任意的*x*1∈[1,e],总存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4,求实数*a*的值*.*

10*.*(12分)已知函数*f*(*x*)*=*e1*-x*,*g*(*x*)*=x*2*+ax-a*(*a*∈R)(e为自然对数的底数)*.*

(1)求证:当*a*≥*-*2且*x<*1时,*f*(*x*)*>g*(*x*);

(2)判断“*a*≤*-*4”是“*φ*(*x*)*=f*(*x*)·*g*(*x*)存在最小值”的什么条件,并予以证明*.*

**答案**

1.A解法一由题易知0,*-*1为方程*g*(*x*)*=*0的根,则0,*-*1为函数*f*(*x*)的零点*.*由于*f*(*x*)*=f*(2*-x*),即函数*f*(*x*)的图象关于直线*x=*1对称,则2,3也为函数*f*(*x*)的零点,所以*f*(*x*)*=-*(*x+*1)*x*(*x-*2)(*x-*3)*=*

*-*[*x*(*x-*2)][(*x+*1)(*x-*3)]*=-*(*x*2*-*2*x*)(*x*2*-*2*x-*3),*f* *'*(*x*)*=-*(2*x-*2)(*x*2*-*2*x-*3)*-*(*x*2*-*2*x*)(2*x-*2)*=-*4(*x-*1)(*x*2*-*2*x-*)*=*

*-*4(*x-*1)(*x-*1*+*)(*x-*1*-*),令*f* *'*(*x*)*>*0,得*x<*1*-*或1*<x<*1*+*,令*f* *'*(*x*)*<*0,得1*-<x<*1或*x>*1*+*,所以*x=*1为函数*f*(*x*)的极小值点,故选A*.*

解法二由题易知0,*-*1为方程*g*(*x*)*=*0的根,则0,*-*1为函数*f*(*x*)的零点*.*由于*f*(*x*)*=f*(2*-x*),即函数*f*(*x*)的图象关于直线*x=*1对称,则2,3也为函数*f*(*x*)的零点,所以*f*(*x*)*=-*(*x+*1)*x*(*x-*2)(*x-*3)*.*把函数*f*(*x*)的图象向左平移1个单位长度得到的图象对应的函数为*m*(*x*)*=f*(*x+*1)*=-*(*x+*2)(*x+*1)(*x-*1)(*x-*2)*=*

*-*(*x*2*-*1)(*x*2*-*4)*=-*(*x*4*-*5*x*2*+*4),*m'*(*x*)*=-*4*x*(*x*2*-*)*=-*4*x*(*x-*)(*x+*),令*m'*(*x*)*>*0,则*x<-*或0*<x<*,令*m'*(*x*)*<*0,则*-<x<*0或*x>*,所以*x=*0为函数*m*(*x*)的极小值点,则*x=*1为函数*f*(*x*)的极小值点,故选A.

2*.*D解法一可以考虑研究问题“对任意的*x*∈R,*f*(*x*)*>ax*恒成立”,即*x+>ax*在R上恒成立*.*

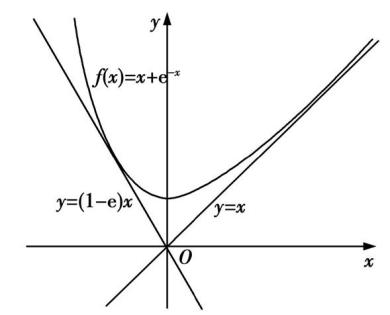
*①*当*x=*0时,该不等式显然成立;

*②*当*x>*0时,*a<*1*+*恒成立,设*g*(*x*)*=*1*+*,显然*g*(*x*)在(0,*+∞*)上单调递减,且当*x*→*+∞*时,*g*(*x*)→1,∴*a*≤1;

*③*当*x<*0时,*a>*1*+*恒成立,由*②*知*g'*(*x*)*=-*,当*x*∈(*-∞*,*-*1)时,*g'*(*x*)*>*0,*g*(*x*)单调递增,当*x*∈(*-*1,0)时,*g'*(*x*)*<*0,*g*(*x*)单调递减,∴当*x=-*1时,*g*(*x*)有最大值,最大值为1*-*e,∴*a>*1*-*e,∴1*-*e*<a*≤1*.*

∴实数*a*的取值范围为(*-∞*,1*-*e]∪(1,*+∞*)*.*故选D*.*

解法二利用导数工具研究函数*f*(*x*)的性质,得到函数*f*(*x*)的图象如图D 1*-*1所示*.*



图D 1*-*1

设直线*y=kx*与*f*(*x*)的图象相切,

切点为(*x*0,*x*0*+*),∴*k=*1*-*,

∴切线方程为*y=*(1*-*)(*x-x*0)*+x*0*+=*(1*-*)*x+*(*x*0*+*1),

∴(*x*0*+*1)*=*0,*x*0*=-*1,∴*k=*1*-=*1*-*e*.*

又当*x*0→*+∞*时,*k*→1,∴直线*y=x*为*f*(*x*)图象的渐近线*.*

数形结合知,实数*a*的取值范围为(*-∞*,1*-*e]∪(1,*+∞*)*.*故选D*.*

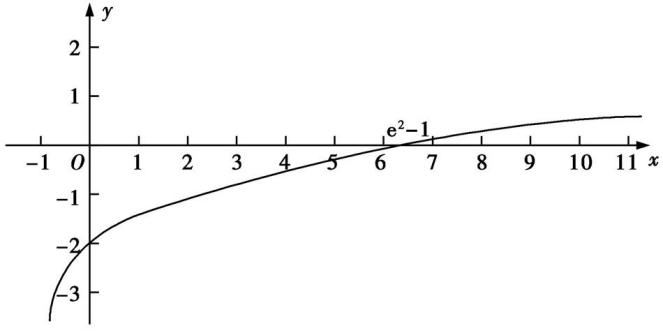
3*.*C由已知2*f*(*x*)*+*(*x-*1)*f* *'*(*x*)*<*0可构造函数*φ*(*x*)*=*(*x-*1)2*f*(*x*),则*φ'*(*x*)*=*2(*x-*1)*f*(*x*)*+*(*x-*1)2*f* *'*(*x*)*=*(*x-*1)[2*f*(*x*)*+*(*x-*1)*f* *'*(*x*)],当*x<*1时,*φ'*(*x*)*>*0,所以*φ*(*x*)在区间(*-∞*,1)上为增函数*.*点*P*(*x*0,*y*0)关于直线*x=*1的对称点*P'*(2*-x*0,*y*0),由于函数*f*(*x*)的图象关于直线*x=*1对称,则*f*(*x*0)*=f*(2*-x*0),而*φ*(2*-x*0)*=*(2*-x*0*-*1)2*f*(2*-x*0)*=*(*x*0*-*1)2*f*(*x*0)*=φ*(*x*0),所以,函数*φ*(*x*)的图象也关于直线*x=*1对称,所以*φ*(*x*)在区间(1,*+∞*)上为减函数*.*不等式(*x+*1)2*f*(*x+*2)*>f*(2)可化为*φ*(*x+*2)*>φ*(2),所以*|x+*2*-*1*|<*1,得*-*2*<x<*0,故选C*.*

4*.*C令*f*(*x*)*=m-x*2*+*2ln *x=*0,则*m=x*2*-*2ln *x.*令*g*(*x*)*=x*2*-*2ln *x*,则*g'*(*x*)*=*2*x-=*,∴*g*(*x*)在区间[,1]上单调递减,在区间(1,e]上单调递增,

∴*g*(*x*)min*=g*(1)*=*1,又*g*()*=*4*+*,*g*(e)*=*e2*-*2,4*+<*5,e2*-*2*>*2*.*72*-*2*>*5,∴*g*()*<g*(e),数形结合知,若函数*f*(*x*)在[,e]上有两个不同的零点,则实数*m*的取值范围为(1,4*+*],故选C*.*

5*.*e*x-y-*2*=*0*f* *'*(*x*)*=*e*x+*4*x-*4,∴切线的斜率*k=f* *'*(1)*=*e,当*x=*1时,*f*(1)*=*e*+*2*-*4*=*e*-*2,∴函数*f*(*x*)的图象在*x=*1处的切线方程是*y-*(e*-*2)*=*e(*x-*1)*=*e*x-*e,即e*x-y-*2*=*0*.*

6*.*1*-*e2切线*y=ax+b*在*x*轴上的截距是*-*,欲求的最小值,只需求切线*y=ax+b*在*x*轴上的截距的最大值*.*因为*f* *'*(*x*)*=>*0,所以*f*(*x*)在(*-*1,*+∞*)上是增函数,零点是*x=*e2*-*1*.*如图D 1*-*2,作出函数 *f*(*x*)的大致图象,结合图象可知*f*(*x*)的图象在点(e2*-*1,0)处的切线在*x*轴上的截距最大,最大值为e2*-*1*.*因此,的最小值是1*-*e2*.*



图D 1*-*2

7*.*(1)当*a=*1时,*f*(*x*)*=x*2*-*2*x+*ln *x*(*x>*0),

*f* *'*(*x*)*=*2*x-*2*+==>*0*.* (2分)

所以*f*(*x*)在区间(0,*+∞*)上单调递增*.*(3分)

(2)*f* *'*(*x*)*=*2*x-*2*a+=*,

由题意得,*x*1和*x*2是方程2*x*2*-*2*ax+*1*=*0的两个不相等的正实数根,所以

解得*a>*,

2*ax*1*=*2*+*1,2*ax*2*=*2*+*1,(6分)

由于*>*,所以*x*1∈(0,),*x*2∈(,*+∞*)*.*(7分)

2*f*(*x*1)*-f*(*x*2)*=*2(*-*2*ax*1*+*ln *x*1)*-*(*-*2*ax*2*+*ln *x*2)

*=*2*--*4*ax*1*+*2*ax*2*-*ln *x*2*+*2ln *x*1

*=-*2*+-*ln*-*1

*=-+-*ln 4*-*1

*=-+-*ln *-*2ln 2*-*1*.*(9分)

令*t=*(*t>*),*g*(*t*)*=-+t-*ln *t-*2ln 2*-*1,则

*g'*(*t*)*=+*1*-==*,

当*<t<*1时,*g'*(*t*)*<*0,当*t=*1时,*g'*(*t*)*=*0,当*t>*1时,*g'*(*t*)*>*0,

所以*y=g*(*t*)在区间(,1)上单调递减,在区间(1,*+∞*)上单调递增,(11分)

*g*(*t*)min*=g*(1)*=-*,

所以2*f*(*x*1)*-f*(*x*2)的最小值为*-.*(12分)

8*.*(1)令*f*(*x*)*=*0,即*x*2*+ax+*1*=*0*.*

设*h*(*x*)*=x*2*+ax+*1, 对于方程*x*2*+ax+*1*=*0,*Δ=a*2*-*4*.*

*①*当*Δ=a*2*-*4*<*0,即*-*2*<a<*2时,*h*(*x*)*>*0在区间(0,*+∞*)上恒成立,

所以当*-*2*<a<*2时,函数*f*(*x*)没有零点;(1分)

*②*当*a=*2时,*h*(*x*)*=x*2*+*2*x+*1*=*(*x+*1)2,所以*h*(*x*)*>*0在(0,*+∞*)上恒成立,

所以当*a=*2时,函数*f*(*x*)没有零点;(2分)

*③*当*a=-*2时,*h*(*x*)*=x*2*-*2*x+*1*=*(*x-*1)2,由*h*(*x*)*=*0,得*x=*1,

所以当*a=-*2时,函数*f*(*x*)有一个零点;(3分)

*④*当*Δ=a*2*-*4*>*0,即*a<-*2或*a>*2时,方程*h*(*x*)*=*0有两个不等实根,

设方程*h*(*x*)*=*0的两个不等实根分别为*x*1,*x*2,且*x*1*<x*2,

(i)当*a<-*2时,*x*1*+x*2*=-a>*0,*x*1*x*2*=*1*>*0,故*x*2*>x*1*>*0,

所以当*a<-*2时,函数*f*(*x*)有两个零点;(4分)

(ii)当*a>*2时,*x*1*+x*2*=-a<*0,*x*1*x*2*=*1*>*0,故*x*1*<*0,*x*2*<*0,

因为函数*f*(*x*)的定义域为(0,*+∞*),

所以当*a>*2时,函数*f*(*x*)没有零点*.*(5分)

综上,当*a>-*2时,函数*f*(*x*)没有零点; 当*a=-*2时,函数*f*(*x*)有一个零点;当*a<-*2时,函数*f*(*x*)有两个零点*.*(6分)

(2)由题意知,对于任意的*x*∈(0,*+∞*),总有*x*·≤e*x-*ln *x+*2*x*2*+*1成立,等价于对于任意的*x*∈(0,*+∞*),总有*a*≤*+x*成立,等价于*a*≤(*+x*)min(*x>*0)*.*(7分)

设*φ*(*x*)*=+x*(*x>*0),

则*φ'*(*x*)*=+*1*=*,

因为*x>*0,所以当*x*∈(0,1)时,*φ'*(*x*)*<*0,所以*φ*(*x*)在区间(0,1)上单调递减;(9分)

当*x*∈(1,*+∞*)时,*φ'*(*x*)*>*0,所以*φ*(*x*)在区间(1,*+∞*)上单调递增*.*(10分)

所以*φ*(*x*)min*=φ*(1)*=*e*+*1,所以*a*≤e*+*1*.*(11分)

所以实数*a*的最大值为e*+*1*.*(12分)

9*.*(1)因为*f*(*x*)*=a*ln *x-x+*2,*x>*0,所以*f* *'*(*x*)*=-*1*=*,*x>*0,

当*a*≤0时,任意的*x*∈(0,*+∞*),*f* *'*(*x*)*<*0,所以*f*(*x*)在区间(0,*+∞*)上单调递减,此时无极值点;(1分)

当*a>*0时,令*f* *'*(*x*)*=*0,得*x=a.*

因为*x*∈(0,*a*)时,*f* *'*(*x*)*>*0,*x*∈(*a*,*+∞*)时,*f* *'*(*x*)*<*0,

所以*f*(*x*)的单调递增区间为(0,*a*),单调递减区间为(*a*,*+∞*),此时函数*f*(*x*)有极大值点*.*(3分)

综上可知,实数*a*的取值范围是(0,*+∞*)*.*(4分)

(2)*①*当*a*≤1时,由(1)知,在[1,e]上,*f*(*x*)是减函数,所以*f*(*x*)max*=f*(1)*=*1*.*

因为对于任意的*x*1∈[1,e],*x*2∈[1,e],*f*(*x*1)*+f*(*x*2)≤2*f*(1)*=*2*<*4,

所以对于任意的*x*1∈[1,e],不存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4*.*(6分)

*②*当1*<a<*e时,由(1)知,在[1,*a*]上,*f*(*x*)是增函数,在(*a*,e]上,*f*(*x*)是减函数,

所以*f*(*x*)max*=f*(*a*)*=a*ln *a-a+*2*.*

因为对于任意的*x*1∈[1,e],*x*2∈[1,e],*f*(*x*1)*+f*(*x*2)≤2*f*(*a*)*=*2*a*(ln *a-*1)*+*4,

又1*<a<*e,ln *a-*1*<*0,所以2*a*(ln *a-*1)*+*4*<*4,

所以对于任意的*x*1∈[1,e],不存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4*.*(8分)

*③*解法一当*a*≥e时,由(1)知,在[1,e]上,*f*(*x*)是增函数,*f*(*x*)min*=f*(1)*=*1,*f*(*x*)max*=f*(e),

由题意,对任意的*x*1∈[1,e],总存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4,

则当*x*1*=*1时,要使存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4,则*f*(1)*+f*(e)≥4,

同理当*x*1*=*e时,要使存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4,则*f*(e)*+f*(1)≤4,所以*f*(1)*+f*(e)*=*4*.*(10分)

对任意的*x*1∈(1,e),令*g*(*x*)*=*4*-f*(*x*)*-f*(*x*1),*x*∈[1,e],*g*(*x*)*=*0有解*.*

*g*(1)*=*4*-f*(1)*-f*(*x*1)*=f*(e)*-f*(*x*1)*>*0,*g*(e)*=*4*-f*(e)*-f*(*x*1)*=f*(1)*-f*(*x*1)*<*0,

所以存在*x*2∈(1,e),使得*g*(*x*2)*=*4*-f*(*x*2)*-f*(*x*1)*=*0,即*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4,

所以由*f*(1)*+f*(e)*=a-*e*+*3*=*4,得*a=*e*+*1*.*

综上可知,实数*a*的值为e*+*1*.*(12分)

解法二当*a*≥e时,由(1)知,在[1,e]上,*f*(*x*)是增函数,*f*(*x*)min*=f*(1)*=*1,*f*(*x*)max*=f*(e),由题意,对任意的*x*1∈[1,e],总存在*x*2∈[1,e],使得*f*(*x*1)*+f*(*x*2)*=*4,则所以*f*(1)*+f*(e)*=a-*e*+*3*=*4,得*a=*e*+*1*.*

综上可知,实数*a*的值为e*+*1*.*(12分)

10*.*(1)当*a*≥*-*2且*x<*1时,设*h*(*x*)*=f*(*x*)*-g*(*x*)*=*e1*-x-x*2*-ax+a*,

则*h'*(*x*)*=-*e1*-x-*2*x-a*,

设*p*(*x*)*=-*e1*-x-*2*x-a*(*a*≥*-*2且*x<*1),

则*p'*(*x*)*=*e1*-x-*2,

令*p'*(*x*)≥0,得*x*≤1*-*ln 2,令*p'*(*x*)*<*0,得1*-*ln 2*<x<*1,

∴*p*(*x*)在区间(*-∞*,1*-*ln 2)上是增函数,在区间(1*-*ln 2,1)上是减函数*.*

∴当*a*≥*-*2时,*p*(*x*)≤*p*(1*-*ln 2)*=*2ln 2*-*4*-a*≤2ln 2*-*4*+*2*=*2(ln 2*-*1)*<*0,

∴当*x<*1时,*h'*(*x*)*<*0,即*h*(*x*)在区间(*-∞*,1)上是减函数*.*(4分)

又*h*(1)*=*0,

∴当*x<*1时,*h*(*x*)*>*0,即*f*(*x*)*>g*(*x*)*.*

故当*a*≥*-*2且*x<*1时,*f*(*x*)*>g*(*x*)*.*(5分)

(2)“*a*≤*-*4”是“*φ*(*x*)*=f*(*x*)·*g*(*x*)存在最小值”的充分不必要条件*.*

下面给予证明:

设*φ*(*x*)*=f*(*x*)·*g*(*x*)*=*(*x*2*+ax-a*)e1*-x*,

则*φ'*(*x*)*=-*(*x+a*)(*x-*2)e1*-x.*(6分)

(i)若*a*≤*-*4,令*φ'*(*x*)*>*0,得2*<x<-a*,令*φ'*(*x*)*<*0,得*x<*2或*x>-a*,

∴*φ*(*x*)在区间(*-∞*,2)上是减函数,在区间(2,*-a*)上是增函数,在区间(*-a*,*+∞*)上是减函数,

∴*φ*(*x*)的极小值*φ*(2)*=*(*a+*4)e*-*1≤0,

当*x*≥*-a*时,*x*2*+ax-a*≥(*-a*)2*-a*2*-a=-a*≥4,

*φ*(*x*)≥4e1*-x>*0,

∴当*a*≤*-*4时,*φ*(*x*)有最小值,最小值为*φ*(2)*=*,

∴“*a*≤*-*4”是“*φ*(*x*)*=f*(*x*)·*g*(*x*)存在最小值”的充分条件*.*(9分)

(ii)注意到当*a=*0时,*φ*(*x*)*=x*2e1*-x*,*φ'*(*x*)*=x*(2*-x*)e1*-x*,

令*φ'*(*x*)*>*0,得0*<x<*2,令*φ'*(*x*)*<*0,得*x<*0或*x>*2,

∴*φ*(*x*)在区间(*-∞*,0)上是减函数,在区间(0,2)上是增函数,在区间(2,*+∞*)上是减函数,

∴当*x=*0时,*φ*(*x*)有极小值*φ*(0)*=*0*.*

又当*x>*2时,*φ*(*x*)*=x*2e1*-x>*0,

∴*φ*(*x*)有最小值0*.*

∴当*φ*(*x*)有最小值时,*a*可以为0*.*

∴“*a*≤*-*4”不是“*φ*(*x*)*=f*(*x*)·*g*(*x*)存在最小值”的必要条件*.*(11分)

综上,“*a*≤*-*4”是“*φ*(*x*)*=f*(*x*)·*g*(*x*)存在最小值”的充分不必要条件*.* (12分)